LOS NÚMEROS PRIMOS:
LOS NÚMEROS CON UNA SOLA DIMENSIÓN

LOS NÚMEROS PRIMOS son primordiales (primitivos, primeros o esenciales), ya que según asegura el TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA, con ellos se pueden 'construir' los demás NÚMEROS NATURALES.

> **Teorema Fundamental de la Aritmética**
>
> Cualquier entero positivo mayor que 1 puede escribirse, de manera única, como un producto de números primos, salvo por el orden en que se escriban los factores.
>
> $$105 = 3 \times 5 \times 7$$
> $$2184 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 13$$

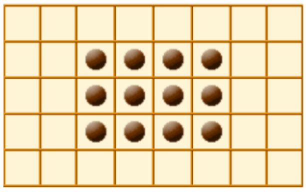
Podemos considerar que los números primos son los «ladrillos» con los que se construyen todos los NUMEROS NATURALES. Dado un número natural cualquiera, por ejemplo el 72, se puede escribir como producto de factores primos: $2^3 \cdot 3^2$. Y cualquier otra factorización del 72 como producto de números primos será idéntica, excepto por el orden de los factores (que no altera el producto)

LA FORMA DE LOS NÚMEROS

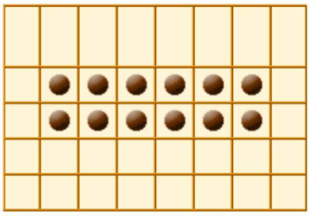
Con lentejas trataremos de formar rectángulos de la siguiente manera:

- Escoge un número entre 1 y 100
- Toma la misma cantidad de lentejas que el número que elegiste.
- Sobre una cuadricula acomoda las lentejas de manera que puedas formar un rectángulo

Por ejemplo, si escogiste el número 12, con 12 lentejas puedes formar estos rectángulos:



- El rectángulo formado por 3 renglones y 4 columnas



- El rectángulo formado por 2 renglones y 6 columnas
- ¿Se podrán formar más rectángulos con el número 12?

Lo que has hecho es escribir el número 12 como una multiplicación,

3 x 4 = 12
2 x 6 =12

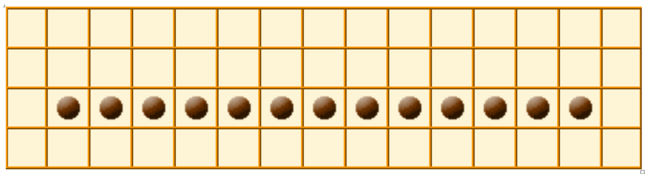
Pues bien, decimos que **el 12 tiene FORMA**: **es un NÚMERO RECTÁNGULAR.**

- ¿Qué pasará si escogemos el número 15?
- ¿Es el número 15 un NÚMERO RECTANGULAR?
- ¿Cuántos rectángulos se formarán?

Elige otros números. Para que no te pierdas, puedes apuntar tus resultados en una tabla como esta

Número	Nº. de filas	Nº. de columnas	Multiplicación
12	3	4	3 x 4 = 12
12	2	6	2 x 6 = 12

Ya sé, ya sé. Me dirás que TODOS LOS NÚMEROS son rectangulares. ¿Qué lista? Pero, ¿qué pasa si descartamos rectángulos como éste?



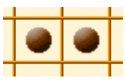
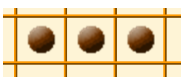
Son rectángulos degenerados, más bien parecen segmentos de línea recta. A mí no me parece adecuado llamar a esto rectángulo. ¿Convienes (de CONVENIO) esto conmigo? Si es así, sigamos:

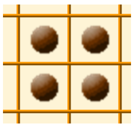
CONVENIO

Llamaremos **NÚMEROS RECTANGULARES** aquellos cuyas unidades se puedan colocar formando un rectángulo perfecto (sin que sobre ni falte nada) **de una anchura y altura superior a uno**.

Que sí, que te veo venir, los CUADRADOS también son RECTÁNGULOS: una clase PARTICULAR de rectángulos, pero rectángulos. ¿Qué no? Estudia bien la DEFINICIÓN de rectángulo, y dime en qué no la cumple un cuadrado, porque te aseguro que la cumple en todo.

Descarta el UNO, es especial, es la UNIDAD: la que lo principia todo. Todos los demás NÚMEROS NATURALES (los que utilizas para CONTAR, ORDENAR y CODIFICAR elementos de conjuntos) se pueden considerar formados por un conjunto de unidades. Ahora vete uno por uno viendo si son o no son RECTANGULARES (de acuerdo con nuestro convenio) Así:

- El  no es, de acuerdo a nuestro convenio, RECTANGULAR
- El  tampoco lo es.

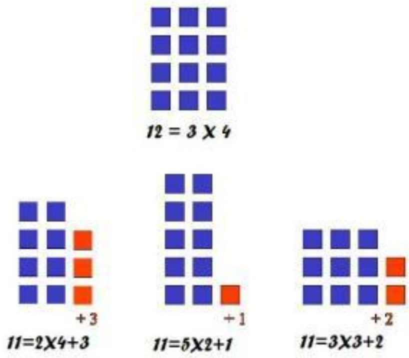
- El  **SÍ** lo es. En concreto, es un rectángulo CUADRO PERFECTO.

Sé ORDENAD@. Sobre esta tabla de los NÚMEROS NATURALES (excepto el 1) vete tachado todos los números que resulten ser RECTANGULARES

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

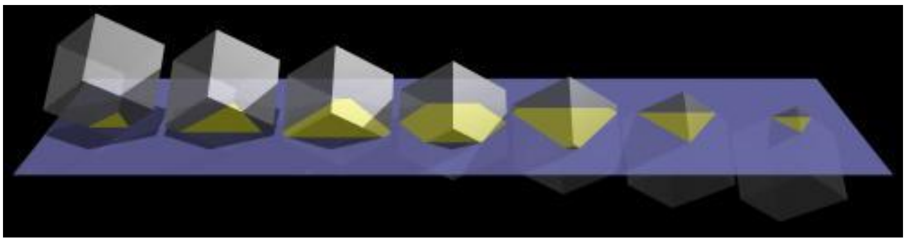
Perdona que insista, ya sé que lo has pillado. La figura de la derecha muestra claramente que el número 12 es RECTANGULAR: con doce cuadraditos (unidades) puedes formar un rectángulo. ¿Lo ves?

Pero en la misma figura ves que el 11 no es un NÚMERO RECTANGULAR. Con 11 unidades no puedes formar un rectángulo. ¿Lo pillas? Luego el 11 será uno de esos números que quedarán sin tachar en la tabla de arriba.



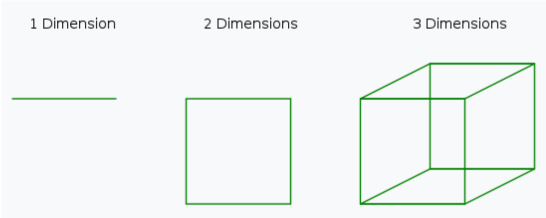
LA DIMENSIÓN DE LOS NÚMEROS

Ahora hablemos de dimensiones. Edwin Abbott en su libro *Planilandia* (*Flatland*) escribe sobre un "ser cuadrado" que vive en un mundo de dos dimensiones, como la superficie de un enorme folio de papel: un PLANO. Este "cuadrado" se enfrenta a experimentos de un ser tridimensional, como nosotros. Ya que el ser tridimensional sólo puede ser percibido por el "cuadrado" en su sección con Planilandia; si éste fuera, por ejemplo, un cubo, al atravesar el 'mundo' del ser bidimensional, el plano, éste lo percibiría como un cuadrado que aparece de repente en su universo bidimensional, y tras permanecer un tiempo manifestado, desaparece. ¿Lo pillas? Claro que el ser cúbico tridimensional podría poner a prueba al ser bidimensional y 'entrar' por una esquina, así:

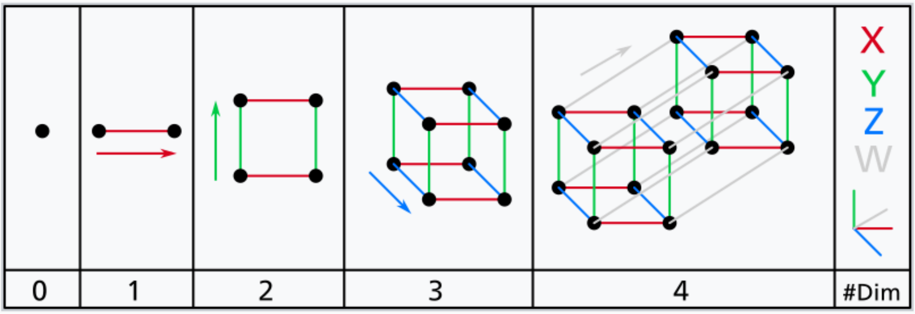


¿Qué vería entonces el ser bidimensional? ¿Puedes describirlo desde su perspectiva donde sólo aprecia polígonos? ¿Podría descubrir por la secuencia de polígonos que van apareciendo la forma del ser tridimensional?

En geometría la dimensión de un objeto se define informalmente (ya que no se puede definir formalmente) como el número mínimo de coordenadas necesarias para especificar cualquier punto de ella. Así, una línea tiene una dimensión porque solo se necesita una coordenada para especificar un punto de la misma. Una superficie, tal como un cuadrado, tiene dos dimensiones, porque se necesitan dos coordenadas para especificar un punto en ella. El interior de un cubo es tridimensional porque son necesarias tres coordenadas para localizar un punto dentro de estos espacios.

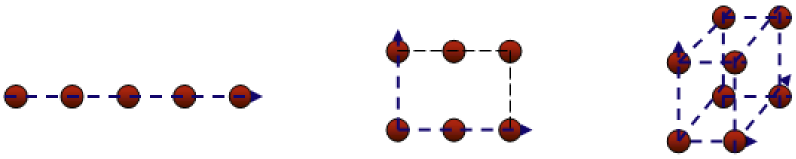


Intuitivamente hablando, las dimensiones de un 'espacio' son las direcciones básicas en las que podemos movernos: izquierda/derecha, arriba/abajo, adelante/atrás…

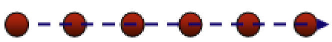


En esos 'espacios', el movimiento en cualquier otra dirección puede expresarse en términos de las direcciones que definen ese 'espacio'. Así, en un espacio unidimensional, moverse hacia la izquierda es lo mismo que moverse hacia la derecha una distancia negativa. En un espacio bidimensional, moverse diagonalmente hacia arriba y hacia adelante es tal como el nombre de la dirección implica; *es decir*, moverse en una combinación lineal de arriba y adelante. Así pues, una línea tiene una dimensión, un plano tiene dos dimensiones, un cubo tiene tres dimensiones, un teseracto (indaga esta palabreja) tiene cuatro dimensiones…

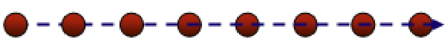
Entendido lo anterior, podemos jugar a dar DIMENSIÓN A UN NÚMERO. El 5 es UNIDIMENSIONAL, el 6 es BIDIMENSIONAL, el 8 es TRIDIMENSIONAL. Así:



Porque con 5 unidades podemos formar un 'segmento', con 6 unidades podemos formar un 'rectángulo', y con 8 'unidades' podemos formar un 'cubo'. Bueno, no tan fácil. Porque el 6 también puede adoptar la forma UNIDIMENSIONAL, así:



Y el 8 también:



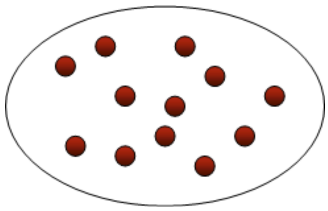
Por eso necesitamos una

DEFINICIÓN

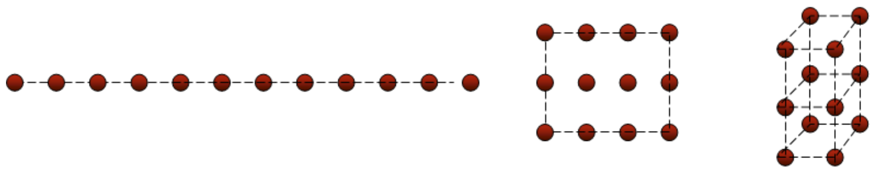
Llamaremos **DIMENSIÓN DE UN NÚMERO** a la dimensión de aquella FORMA de máxima dimensión que pueda adoptar dicho número, siempre que esta forma sea 'prismática'.

Llamamos forma 'prismática' a la que tiene, en una dimensión, largura; en dos dimensiones, largura y anchura; en tres, largura, anchura y altura… Es decir, a las FORMAS que se corresponden en cada 'espacio' a lo que llamamos prismas en el espacio tridimensional.

Con un ejemplo lo entenderás bien, el 12 es el cardinal de un conjunto de doce unidades, así:



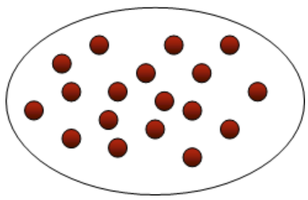
Con estas doce unidades podemos formar estas FORMAS 'PRISMÁTICAS' en una, dos y tres dimensiones:



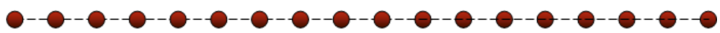
Luego la DIMENSIÓN del número 12 es TRES. Porque es la DIMENSIÓN de la FORMA de máxima dimensión. Y sus dimensiones son largo x ancho x alto: 2 x 2 x 3.

¿CÓMO CALCULAMOS LA DIMENSIÓN DE UN NÚMERO?

Como te vengo diciendo, un NÚMERO NATURAL lo puedes visualizar como un conjunto de unidades. ¿De qué número estamos hablando ahora?

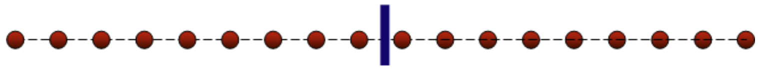


Muy bien, del 18, porque hay dieciocho puntitos (unidades). Estas unidades SIEMPRE las podemos alinear. Así:

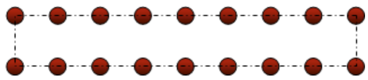


Luego todos los números son, como mínimo, UNIDIMENSIONALES.

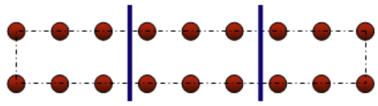
Pero si el NÚMERO (de unidades) es PAR, podemos DIVIDIRLO en dos partes iguales. Así:



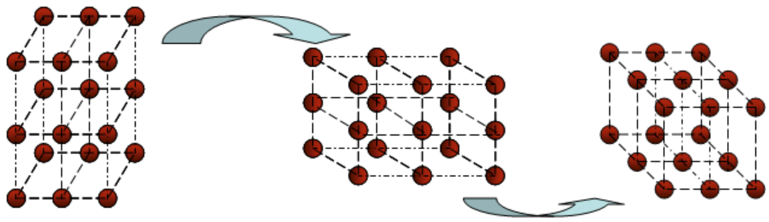
Partes que podemos recolocar así:



Una FORMA RECTANGULAR que tiene largura (9) y anchura (2).   Pues bien, si la largura es par la podemos dividir en dos partes iguales. Si, como en esta caso, no lo es, y es DIVISIBLE por tres, la podemos dividir en tres partes iguales. Así:



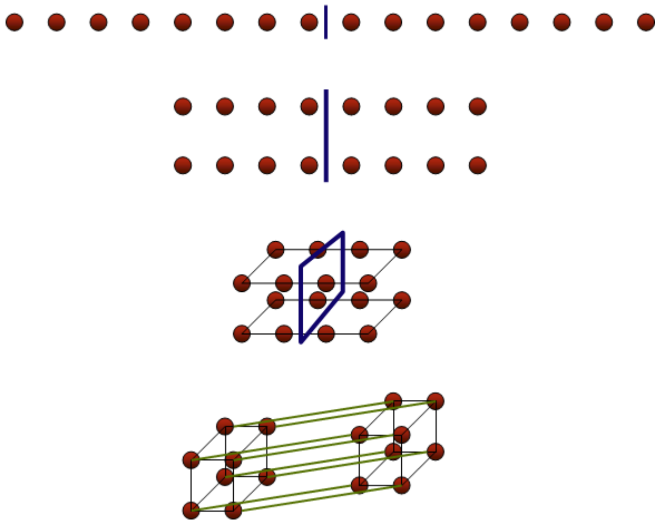
Y recolocar estas tres partes formando un PRISMA RECTANGULAR. Así.



Que tiene estas TRES DIMENSIONES: 2 x 3 x 3. Como estos tres números sólo son DIVISIBLES por la UNIDAD, hemos terminado. La dimensión del NÚMERO 18 es TRES.

¿Puedes calcular tú la dimensión del número 16?

Así:



Luego la DIMENSIÓN del número 16 es CUATRO: 2 x 2 x 2 x 2.

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES

La UNIDAD es UNA y ÚNICA. Así:

Bueno; así, exactamente, no puede ser. Porque LA UNIDAD es

- **INVISIBLE, los ojos no le pueden ver;**
- **IMPERCEPTIBLE, los oídos no le pueden oír;**
- **INTANGIBLE, no se la puede coger;**
- **INDIVISIBLE, no tiene partes; e**
- **INDESTRUCTIBLE, nada le afecta.**

Su DIMENSIÓN es CERO: LA NADA. Con ello no le negamos toda existencia, le negamos la realidad palpable y visible propia de todos los seres conocidos a través de nuestros sentidos corporeomentales. Porque

El PUNTO ES, LA UNIDAD ES, tiene EXISTENCIA,

aunque sea una EXISTENCIA NO MANIFESTADA.

Así que TODO comienza en la UNIDAD. La UNIDAD se mira en el espejo esférico de SÍ-MISMA, y se ve REFLEJADA INFINITAS VECES. Surge, así, LA MULTIPLICIDAD como concepto. Tenemos ahora un conjunto de infinitas unidades: la SUCESIÓN CONSTANTE {1}

{1} = {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1…}

Toda sucesión tiene asociada otra sucesión, que es la sucesión que se obtiene con las sumas parciales de los términos de la sucesión original. Es decir, a toda SUCESIÓN se le puede asociar otra SUCESIÓN definida de la siguiente forma:

$$\begin{cases} Dada\ \ la\ sucesión\ \{a_n\} \\ Se\ define\ \{s_n\}\ \therefore\ s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \end{cases}$$

Calma; sólo son NOTACIONES para resumir explicaciones muy largas. Pero lo que se quiere decir, en esencia, es muy simple: el primer término de la sucesión asociada es el primer término de la sucesión original; el segundo, la suma de los dos primeros términos; el tercero, la suma de los tres primeros términos… Y así hasta el infinito… ¡y más allá!
Apliquemos esta idea a la sucesión constante {1}. Tenemos que

I_n : 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, … 1 …

1 = 1
2 = 1+1
3 = 1+1+1
4 = 1+1+1+1
5 = 1+1+1+1+1
6 = 1+1+1+1+1+1
7 = 1+1+1+1+1+1+1
………………………………

$$n = \sum_{k=1}^{n} 1$$

¿Ves cómo al ir CONTANDO o NUMERANDO UNIDADES,

- **uno es UNO;**
- **uno y uno, son DOS;**
- **uno y uno y uno, son TRES;**
- **………………………………………………**

aparece, majestuoso, el CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES? ¡He aquí sus primeros elementos!

- **El UNO denota la UNIDAD: UNA y ÚNICA.**
- **El DOS denota la 'CLASE' de los conjuntos de dos unidades.**
- **El TRES denota la 'CLASE' de los conjuntos de tres unidades.**
- **……………………………………………………………………………………**

Hay mucho de TAUTOLOGÍA en esto. Pero ¿qué es el TRES? ¿Lo has pensado alguna vez? De hecho es una DOBLE ABSTRACCIÓN, esa maravillosa capacidad de nuestra mente capaz de crear CONCEPTOS… ¡y más CONCEPTOS!

Si a este CONJUNTO le añadimos el ORDEN NATURAL (ser mayor que) de los NÚMEROS ENTEROS obtenemos, así, LA SUCESIÓN -conjunto ordenado de números- DE LOS NÚMEROS NATURALES

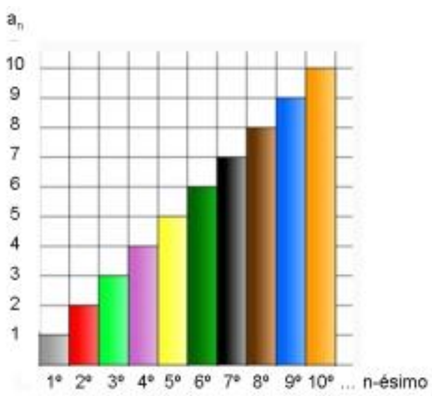
N : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 ,15 16, 17 …. n ….

Dado que en la SUCESIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES el orden (posición en la secuencia) y el 'tamaño' (el valor) de sus elementos coinciden, a esta sucesión le corresponde la siguiente TABLA:

n	**=**	**1º**	**2º**	**3º**	**4º**	**5º**	**6º**	**7º**	**8º**	**9º …**
a_n	**=**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9 …**

TABLA que hay que leer así: el PRIMERO es UNO; el segundo es dos; el tercero es tres; el cuarto, cuatro; el quinto, cinco; el sexto, seis; el séptimo, siete; el octavo, ocho; el noveno, nueve; el décimo, diez. ¿Sigo? ¿Te queda clara la diferencia entre ORDINALES y CARDINALES? Sí: LOS ORDINALES ponen 'orden' en los elementos de un conjunto; y LOS CARDINALES cuentan (o 'numeran') sus elementos. ¿Lo pillas?

La tabla anterior puede visualizarse en la siguiente GRÁFICA:



De donde se deduce la siguiente FÓRMULA:

$$a_n = n$$

La SUCESIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES es la sucesión (no constante) más simple de todas:

N : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 ,15 16, 17 …. n

Una sucesión que sirve tanto para NUMERAR o CONTAR (uno, dos, tres…) como para ORDENAR (primero, segundo, tercero…) otros conjuntos discretos.

Volviendo al principio de esta ACTIVIDAD, has comprobado que hay números que no pueden adoptar la FORMA RECTANGULAR: con ese número de unidades no se pueden formar rectángulos. Los llamamos los

NÚMEROS PRIMOS

Porque resultan ser primordiales (fundamentales) para la matemática de los números. Como voy a intentar que visualices dentro de un rato, con ellos, como si fuesen las piezas de un puzle, podemos construir todos los NÚMEROS NATURALES. Éstos

P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37…}

DEFINICIÓN

Llamaremos **NÚMERO PRIMO** a todo número natural que es únicamente **UNIDIMENSIONAL**.

Evidentemente, todo número natural que no es un NÚMERO PRIMO, puede adoptar la FORMA RECTANGULAR: es, como mínimo, BIDIMENSIONAL. Luego

DEFINICIÓN

Llamaremos **NÚMERO COMPUESTO** a todo número natural que es un **NÚMERO RECTANGULAR**.

En definitiva, ésta es la **CLASIFICACIÓN** de los **NÚMEROS NATURALES:**

NÚMEROS PARA CONTAR
NATURALES

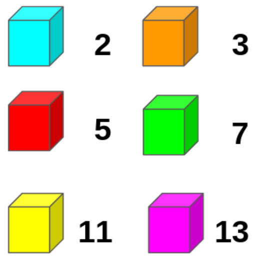
- **1**: **LA UNIDAD**
- **PRIMOS**
  (Los múltiplos UNICAMENTE de la UNIDAD)
- **COMPUESTOS** o RECTANGULARES
  (Tienen DIVISORES PROPIOS)

Y, pásmate,

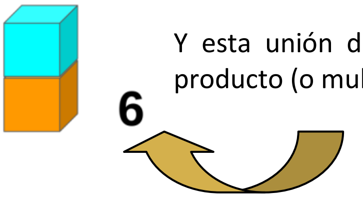
TEOREMA

Hay un **NÚMERO INFINITO** de NÚMEROS PRIMOS: primitivos, primordiales o esenciales

SÍ, LOS NÚMEROS PRIMOS SON ‘PRIMORDIALES’

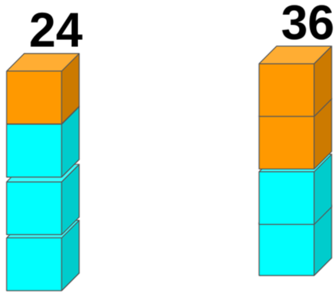


IMAGINA, ahora, que cada policubo de un color representa un número primo. El 2 es azul; el 3, naranja; el 5, rojo; el 7, verde. Así:



Y esta unión de dos policubos (el azul -2- y el naranja -3-) corresponde a su producto (o multiplicación): el 6.   ¿Lo pillas?

¿Cómo sería el 24? ¿Y el 36?   Muy bien, así:



Ya sé que lo sabes, pero déjame que te lo recuerde: a esto se le llama

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN NÚMERO

Y es ÚNICA, salvo el orden. Puedes poner los policubos naranja abajo, o por el medio. Pero los que están, son los que tienen que estar; no puedes quitar, ni poner nuevos.

Como ya sabes de cursos anteriores, hay un ALGORITMO que te permite calcular ORDENADAMENTE la descomposición factorial de un número. ¿Lo recuerdas? Para ello tienes que comprender bien que es un ALGORITMO:

UN ALGORITMO es una colección bien estructurada de INSTRUCCIONES que, ejecutada en un orden especificado, producen correctamente el resultado deseado. EL ALGORITMO es una UN PIEZA MUY COMÚN del saber matemático. Tienes que memorizar los pasos, y seguirlos en el orden adecuado.

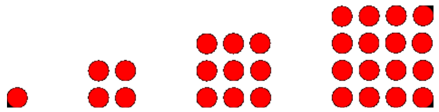
$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Es lo mismo que te mostraba antes, el 12 es una ‘torre’ de dos policubos azules y uno color butano. Has puesto COLOR a los números primos. Todos los ALGORITMOS son PROGRAMABLES, por eso cualquier calculadora moderna te hace la DESCOMPOSICION FACTORIAL de un número.

Pero, ¿por qué? ¿Para qué queremos SABER HACER estas cosas?

- **Primero**, porque es divertido. Es como un juego, ¿con dos policubos azules, uno rojo y otro amarillo, que torre puedes construir? ¿Es única? ¿A qué número representa?
- **Segundo**, porque así adquieres el SENTIDO NUMÉRICO. ¿Qué policubos necesitas para construir la torre que representa al 110? Y ahora, cuando veas el 110, lo ves en colores.

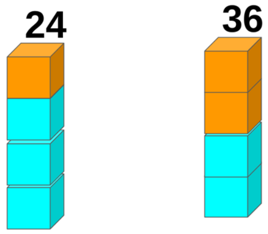
- **Tercero**, porque con esto puedes demostrar muchas propiedades superinteresantes. Ya hemos hablado de los NÚMEROS CUADRADOS PERFECTOS

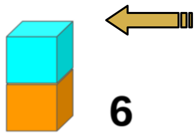


Toma los policubos y CONSTRÚYELOS. ¿Qué observas? Intenta ser muy precis@ en tu descripción de lo que está pasando. Observa bien las 'torres' y busca regularidades.

- **Cuarto**, porque te ayudan a calcular otras cosas. Cierra los ojos e imagina, en colores, el número 12. ¿Lo ves? Descríbelo. Toma, en la imaginación, una de sus piezas. ¿Qué es? Ya sé, un número primo. Pero que más. Es un DIVISOR del 12. ¿Cuántos tiene? No te olvides de que cualquier torre hecha con todas o partes de sus piezas es un divisor del 12. Y el 1.

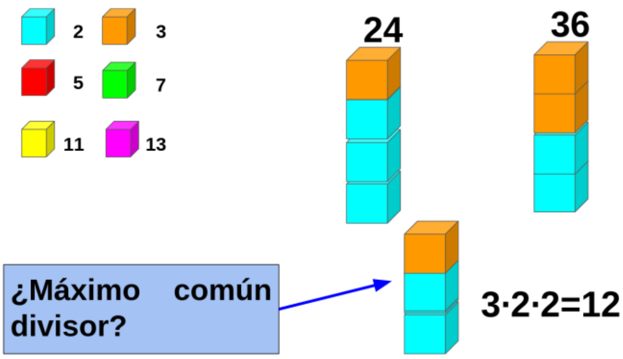
Si **IMAGINAS (visualizas)** ahora las torres que representan a dos números cualesquiera, por ejemplo éstas. Cada una de las piezas que tienen en común (el butano = 3, y el azul = 2) es un **DIVISOR COMÚN**.



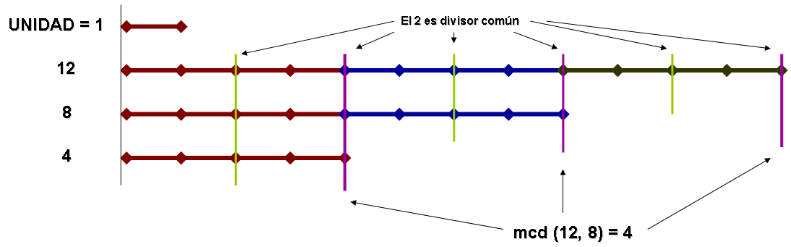


Hay muchos más. Cada cadena de piezas que comparten es otro divisor común. En este caso el 6 **es un DIVISOR COMÚN**. ¿Cuántos divisores comunes tienen el 24 y el 36?

Llamamos **MÁXIMO COMÚN DIVISOR** de dos números, al mayor de sus divisores comunes. A la cadena más larga de piezas que comparten. Fácil, ¿no? Así:

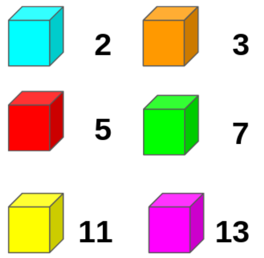


Esto también lo puedes VISUALIZAR así. Y conviene que así lo hagas. IMAGINA que cada número natural es un SEGMENTO DE LÍNEA RECTA compuesto de tantas unidades como indica el número. Así:



Entonces, los DIVISORES DE UN SEGMENTO (NÚMERO) son los SEGMENTOS (números) que entran un número exacto de veces en ese segmento (en ese número). Y el MÁXIMO COMÚN DIVIDOR de dos segmentos (números) es el segmento (número) MÁS LARGO (más grande) que entra un número exacto de veces en los dos segmentos. Como ves, cualquier divisor del máximo común divisor (**mcd**) también entra un número exacto de veces en los dos números.

RESUMAMOS. Se puede ver, de forma sencilla, que todos los números naturales los podemos ir creando como producto de números primos (son las piezas con las que construimos los números)

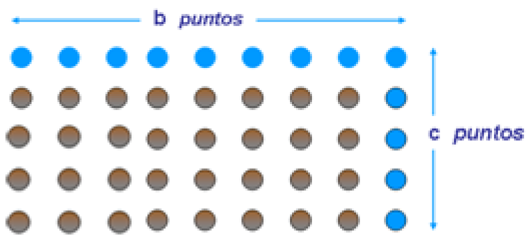


- Algunos, sólo tendrán UNA PIEZA. ¿Cuáles?
- Todos los números que tienen dos piezas o más, son RECTANGULARES o **COMPUESTOS**.
- Los NÚMEROS CUADRADOS PERFECTOS tienen un número par de de cada color.
- IMAGINAR que LOS NÚMEROS TIENEN FORMA, o que son segmentos de línea recta múltiplos de la UNIDAD DE MEDIDA, es tener REPRESENTACIONES VISUALES de los números naturales que nos ayuda mucho a comprender sus propiedades. Empieza a leer DE NUEV@ esta actividad, verás, sorprendid@, que ahora entiendes más y mejor. Esto es APREHENDER.

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN NÚMERO

Sea n un NÚMERO NATURAL cualquiera. Pues bien.

- Si n es PRIMO, n = n (no se puede descomponer en más factores)
- Si n es COMPUESTO (es RECTANGULAR), existen b y c (las dimensiones del rectángulo) tales que n = b · c.



Ahora, si b es COMPUESTO, es que existen d y e tales que b = d · e , y

$$n = b \cdot c = b \cdot d \cdot e$$

Y podríamos seguir así hasta que todos los factores fueran PRIMOS. Puede que al final algunos factores sean iguales, y entonces los podremos agrupar en POTENCIAS.

Una potencia es una forma abreviada de escribir un PRODUCTO de factores iguales. Así

$$\boldsymbol{a \cdot a \cdot a \cdots a \equiv a^n}$$

donde n cuenta el número de factores (de aes) que hay.

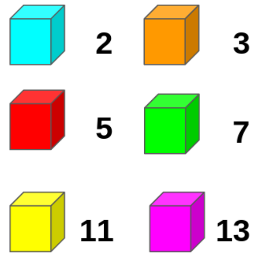
Luego

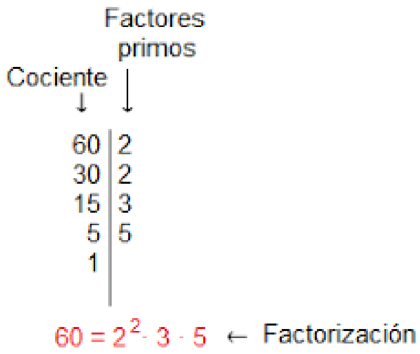
TEOREMA: **Todo NÚMERO NATURAL se puede escribir como producto de factores PRIMOS. Y este producto es único salvo el orden de los factores. Así:**

$$\boldsymbol{n = p^a \cdot q^b \cdot r^c \cdots s^d}$$

Es evidente que si n se pudiera descomponer en dos productos de factores primos con algún factor primo diferente llegaríamos a una contradicción.

El Teorema Fundamental de la Aritmética hace que los NÚMEROS PRIMOS sean NÚMEROS PRIMORDIALES: están en el origen o principio de todos los números. De ahí el nombre de PRIMOS, por ser PRIMORDIALES. En efecto, los NÚMEROS PRIMOS son como los ladrillos básicos con los que podemos construir (mediante el PRODUCTO) todos los demás números.





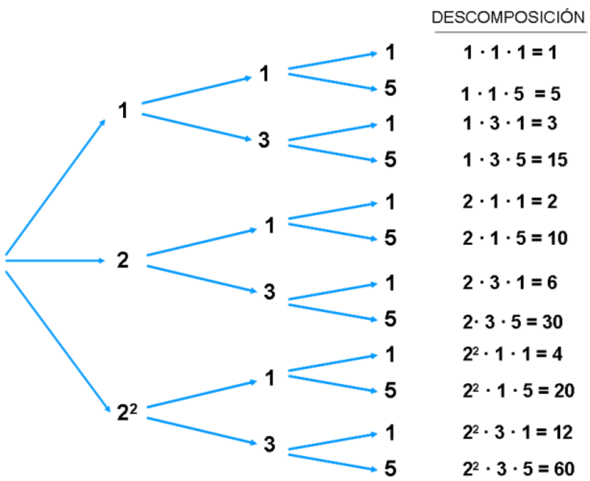
Ya conoces, de primaria, un ALGORITMO que te permite hallar la descomposición en factores primos de un número: Por ejemplo, de 60. Empiezas a dividir 60 por el primo más pequeño, el 2. Como es par, es divisible entre 2, y el cociente es 30. Ahora, como 30 es par, lo puedes dividir por 2. El cociente es 15. Como 15 es impar, has terminado con el 2, sólo entra en la descomposición dos veces. Ahora pruebas con el siguiente primo en la serie ordenada de los números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17… Es el 3, que divide a 15, cociente 5. Ya has terminado con el 3. Ahora toca el 5, 5 entre 5, a 1. Has terminado.

La descomposición en factores primos te permite calcular muchas cosas. En primer lugar te permite calcular los divisores de ese número, pues cualquier cadena de factores contenida en la descomposición factorial de ese número, es un DIVISOR del mismo. Por ejemplo: $2 \cdot 3$; 2^2; $2^2 \cdot 3$; $2 \cdot 3 \cdot 5$; son DIVISORES de 60. Pero ¿cuántos hay?

NÚMERO DE DIVISORES DE UN NÚMERO

Calcular el NÚMERO DE DIVISORES de un número es un PROBLEMA DE CONTAR. Para resolverlo utilizaremos la TÉCNICA conocida como DIAGRAMA DE ÁRBOL (la que se utiliza para contar las remas de un árbol)

Del tronco salen tres ramas, las tres posibilidades que hay para el dos: no cogerle, cogerle una vez, o cogerle dos veces. De cada una de estas ramas salen dos ramas que representan las posibilidades del 3: no cogerle, o cogerle una vez. Ya tenemos $3 \cdot 2 = 6$ ramas. De cada una de estas salen dos ramas que representan las posibilidades del 5: no cogerle, o cogerle una vez. Total $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ ramas, doce combinaciones o doce divisores son los que tiene el número 60. Así:



No hace falta hacer el árbol para saber el NÚMERO DE DIVISORES de un número. Basta hacer esto: a cada exponente de la descomposición factorial se le suma uno, se hace el producto de todos estos números y tenemos el número total de DIVISORES: (2+1) (1+1) (1+1) = 12.

El NÚMERO DE DIVISORES te puede dar información de cómo es el número:

- Si tiene DOS divisores, es que sólo tiene un factor: es un NÚMERO PRIMO.
- Si tiene TRES divisores, es que sólo tiene un factor elevado al cuadrado: es un NÚMERO CUADRADO PERFECTO. Pero no todos los NÚMEROS CUADRADOS PERFECTOS tienen sólo tres divisores. ¿Por qué?
- Si tiene CUATRO divisores, las posibilidades aumentan: que tenga solo dos factores, o que tenga uno elevado al cubo. Si tiene CINCO, es un número hipercúbico. …

CÁLCULO DE LA DIMENSIÓN DE UN NÚMERO

Para terminar, ahora estamos en disposición de dar una RECETA que te permite calcular la DIMENSIÓN DE UN NÚMERO. Toma un NÚMERO NATURAL cualquiera n, descomponlo en FACTORES PRIEMOS, así:

$$\boldsymbol{n = p^a \cdot q^b \cdot r^c \cdots s^d}$$

Entonces, la DIMENSIÓN de n es:

$$\boldsymbol{Dim(n) = a + b + c + \cdots + d}$$

EJEMPLOS

- Evidentemente si n es **PRIMO,** $\boldsymbol{n = p,}$

  su DIMENSIÓN es $\boldsymbol{Dim(p) = 1.}$ Y sus dimensiones son p.

- Evidentemente si n es un **NÚMERO CUADRADO PERFECTO** de lado primo**,** $\boldsymbol{n = p^2,}$

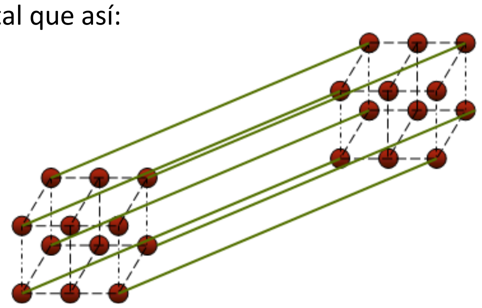
  su DIMENSIÓN es $\boldsymbol{Dim(p^2) = 2}$. Y sus dimensiones son p x p.

- Evidentemente si n es un **NÚMERO CÚBICO PERFECTO** de arista prima, $\boldsymbol{n = p^3}$,

  su DIMENSIÓN es $\boldsymbol{Dim(p^3) = 3.}$ Y sus dimensiones son p x p x p.

- Evidentemente si n es $\boldsymbol{2^3 \cdot 3 = 24}$,

  su DIMENSIÓN es $\boldsymbol{Dim(24) = 3 + 1 = 4}$. Y sus dimensiones son 2 x 2 x 2 x 3. Algo que podrías VISUALIZAR tal que así:



Calcula tú la Dim(100), sus DIMENSIONES, y cómo podríamos VISUALIZARLO

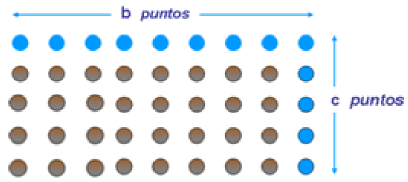
EPÍLOGO

Como quizá ya intuyas, la DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS de un NÚMERO está íntimamente ligada a su DIMENSIÓN.

- **El 1, LA UNIDAD**, no tiene dimensiones, por eso los iniciados solamente consideraban como números los enteros positivos y ni siquiera consideraban como número a la UNIDAD. La unidad era, eso, "LA UNIDAD": UNA (indivisible) y ÚNICA (no-dos)

- **LOS NÚMEROS PRIMOS** son los NÚMEROS UNIDIMENSIONALES (con una sola dimensión). Si tomas una cantidad de lentejas que se correspondan con un NÚMERO PRIMO, no podrás formar con ellas ninguna FORMA RECTANGULAR. ¡Imposible! Porque los NÚMEROS PRIMOS no tienen DIVISORES PROPIOS (excluyendo el 1 y el número mismo). Así pues, NO SE PUEDEN FACTORIZAR: poner como un producto de factores distintos de 1.

- **LOS NÚMEROS COMPUESTOS** se pueden FACTORIZAR: poner de la forma n = b · c. Lo que les permite adquirir, en 2D, la FORMA RECTANGULAR. Así:



Y, en última instancia, los podemos escribir como un producto único de factores primos. Así:

$$n = p^a \cdot q^b \cdot r^c \cdots s^d$$

Por lo que pueden 'elevarse' hasta esta DIMENSIÓN:

$$Dim(n) = a + b + c + \cdots + d$$

Eso les convierte en seres POLIMÓRFICOS (con muchas formas) y POLIANFIBIOS (capaces de habitar muchos 'mundos') En concreto, todos los NÚMEROS COMPUESTOS tienen, al menos, una FORMA RECTANGULAR. Lo que les hace capaces de habitar en DOS DIMENSIONES.

La cantidad de FORMAS RECTANGULARES de un NÚMERO COMPUESTO depende de su NÚMERO DE DIVISORES. Concretando, si

$$n = p^a \cdot q^b \cdot r^c \cdots s^d$$

Entonces el NÚMERO DE DIVISORES PROPIOS que tiene n es:

$$Div(n) = (a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1) \cdots (d+1) - 2$$

Por lo que el NÚMERO DE FORMAS RECTANGULARES que puede adoptar es

$$NFR(n) = E\left[\frac{(a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1) \cdots (d+1) - 1}{2}\right]$$

¿Qué números compuestos tienen una única FORMA RECTANGULAR?

Ya que $\boldsymbol{NFR(n) = E\left[\frac{(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)\cdots(d+1)-1}{2}\right]} = \mathbf{1}$

Tenemos que $\boldsymbol{1 \leq \frac{(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)\cdots(d+1)-1}{2} < 2}$

Luego, $2 \leq \boldsymbol{(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)\cdots(d+1)-1<4}$

O bien, $3 \leq \boldsymbol{(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)\cdots(d+1)} < \mathbf{5}$

Lo que se cumple sólo en dos casos:

- **a = 2, b = c = … = d = 0**
- **a = 1, b = 1, c =…= d = 0**

¿Puedes interpretar qué clase de números son estos?

- Evidentemente la primera clase son los **NÚMEROS CUADRADOS PERFECTOS** que tienen por lado un **NÚMERO PRIMO**.
- Y la segunda, son los **NÚMEROS RECTANGULARES** cuyos lados son **NÚMEROS PRIMOS**.

Estos números no pueden pasar de la SEGUNDA DIMENSIÓN, carecen de ‘cuerpo’ para habitar dimensiones superiores. Los demás NÚMEROS RECTANGULARES pueden ‘recomponer’ su FORMA (como un transformer) adquiriendo otras que les permiten habitar la TERCERA, la CUARTA, la QUINTA… DIMENSIÓN. Todo depende de lo ‘evolucionados’ que estén.

¿Qué NÚMEROS RECTANGULARES pueden elevarse sólo hasta la TERCERA DIMENSIÓN? ¿Y sólo hasta la CUARTA, QUINTA…? ¿Puedes describirlos con claridad?

- Los NÚMEROS COMPUESTOS o RECTANGULARES que pueden elevarse sólo hasta TERCERA DIMENSIÓN tienen que cumplir que

$$\boldsymbol{Dim(n) = a + b + c + \cdots + d = 3}$$

Por lo que pueden darse estos TRES CASOS:

- a = 3, b = c = …= d = 0. Que son los **NÚMEROS CÚBICOS** cuya arista es un NÚMERO PRIMO.
- a = 2, b = 1, c =…= d = 0. Que son los **NÚMEROS ORTOÉDRICOS** de base cuadrada cuyas DIMENSIONES (largo, ancho y alto) son NÚMEROS PRIMOS.
- a = 1, b = 1, c = 1, d = … = 0. Que son los **NÚMEROS ORTOÉDRICOS** cuyas DIMENSIONES (largo, ancho y alto) son NÚMEROS PRIMOS distintos.

Sigue tú. Y calcula NFR(100) – Número de Formas Rectangulares del Número 100-

Como ves, en su DIMENSIÓN más elevada, un NÚMERO adopta un ‘cuerpo’ (una FORMA) que podríamos llamar HIPERORTOÉDRICA, cuyas ‘aristas’ son TODAS números primos. Las DIMENSIONES por encima de ésta están veladas para ese NÚMERO. Pero siempre puede reducir su DIMENSIONALIDAD, de una en una, hasta la PRIMERA DIMENSIÓN. ¿Es esto cierto? Es decir, ¿un número, por ejemplo, de 5D, puede ‘habitar’ la 1D, la 2D, la 3D, la 4D y la 5D? ¿Con cuántas FORMAS puede ‘habitar’ cada una de esas DIMENSIONES?