Cálculo del rango de matrices

Objetivos. Aprender a calcular el rango de matrices.

Requisitos. Definición y propiedades del rango de una matriz, eliminación de Gauss, matrices escalonadas y pseudoescalonadas.

1. Método. Sabemos que el rango de una matriz no se cambia al aplicar operaciones elementales por renglones, y el rango de una matriz ecalonada o pseudoescalonada por renglones es igual al número de sus renglones no nulos. Por eso, para calcular el rango de una matriz, la transformamos (haciendo operaciones elementales por renglones) en una matriz escalonada o pseudoescalonada. También podemos transformarla con operaciones elementales por columnas en una matriz pseudoescalonada por columnas.

2. Ejemplo. Calculemos el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 10 & -7 \\ 3 & -5 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Primera solución. En el primer paso usamos como pivote el elemento $A_{1,4}$:

$$A \xrightarrow[R_3 += 4R_1]{R_2 += -7R_1} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & -1 \\ -11 & 17 & -11 & 0 \\ 11 & -17 & 11 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += R_2} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & \boxed{-1} \\ \boxed{-11} & 17 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La última matriz B es pseudoescalonada por renglones: en cada renglón no nulo hay una entrada no nula tal que todas las entradas por debajo de esta (en la misma columna) son cero. El rango de B es igual el número de sus renglones no nulos: $\mathrm{r}(B) = 2$. Como el rango de una matriz no se cambia al aplicar operaciones elementales por renglones, $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = 2$. $\square$

Segunda solución. Se sabe que $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^\top)$. Haciendo operaciones elementales por renglones transformemos la matriz $A^\top$ en una matriz pseudoescalonada:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -3 & -4 & -5 \\ 3 & 10 & -1 \\ -1 & -7 & 4 \end{bmatrix}}_{A^\top} \xrightarrow{\substack{R_1 += 2R_4 \\ R_3 += -3R_4 \\ R_3 += R_4}} \begin{bmatrix} 0 & -11 & 11 \\ 0 & 17 & -17 \\ 0 & -11 & 11 \\ -1 & -7 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \leftrightarrow R_4 \\ R_3 += 11/17 R_2 \\ R_4 += 11/17 R_2}} \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{-1} & -7 & 4 \\ 0 & \boxed{17} & -17 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C}.$$

De aquí $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^\top) = \mathrm{r}(C) = 2$. $\square$

Tercera solución. Esta vez usamos la entrada $A_{1,1} = 2$ como pivote:

$$A \xrightarrow[R_3 += -\frac{3}{2}R_1]{R_2 += -\frac{3}{2}R_1} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1/2 & 11/2 & -11/2 \\ 0 & -1/2 & -11/2 & 11/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += R_2} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1/2 & 11/2 & -11/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hemos transformado la matriz A en una matriz escalonada D, y D tiene dos renglones no nulos. Por lo tanto, $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(D) = 2$. □

Cuarta solución. Aplicamos operaciones elementales por columnas, usando $A_{1,4} = -1$ como pivote:

$$A \xrightarrow{\substack{C_1 += 2C_4 \\ C_3 += -3C_4 \\ C_3 += C_4}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -11 & 17 & -11 & -7 \\ 11 & -17 & 11 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{C_1 \leftrightarrow C_4 \\ C_3 += 11/17 C_2 \\ C_4 += 11/17 C_2}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 17 & 0 & 0 \\ 4 & -17 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La última matriz es pseudoescalonada por columnas, esto es, en cada columna no nula hay una entrada no nula tal que todas las entradas a la derecha (del mismo renglón) son cero. El rango de esta matriz E es igual al número de sus columnas no nulas: $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(E) = 2$. □

3. Ejemplos. Calcular el rango de cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Ejercicios. Calcule el rango de cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

5. Ejemplo. Para matrices de pequeños tamaños a veces está claro sin cálculos cuál es su rango. Calculemos los rangos de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -2 & 10 & -8 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & -4 \\ 6 & -2 & 8 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Solución.

1. La matriz A tiene dos filas no nulas, y ninguna de estas filas es múltipla de otra, por eso $\mathrm{r}(A) = 2$.
2. En la matriz B la primera fila es no nula, la segunda fila es un múltiplo de la primera, y la tercera no es un múltiplo de la primera. Por eso $\mathrm{r}(B) = 2$.
3. La matriz C es pseudoescalonada y tiene tres filas no nulas, por eso $\mathrm{r}(C) = 3$.
4. Todas tres filas de la matriz D son multiplas una de otra (lo mismo con las columnas), por eso $\mathrm{r}(D) = 1$.
5. La matriz E tiene dos columnas no nulas, y ninguna de estas es múltiplo de la otra. Por eso $\mathrm{r}(E) = 2$.
6. La matriz F es pseudoescalonada por columnas y tiene tres columnas no nulas. Por eso $\mathrm{r}(F) = 3$. $\square$

6. Ejercicios. Calcule los rangos de las siguientes matrices sin transformarlas:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 8 \\ -6 & 4 & -8 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & -10 & -15 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 8 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Están dadas cuatro matrices A, B, C, D:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ -6 & 4 & -14 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathcal{F}$ la lista de las columnas de la matriz A y sea $S = \ell(\mathcal{F})$ el subespacio generado por $\mathcal{F}$ en el espacio $V = \mathbb{R}^m$, donde m es el número de los renglones de la matriz A. Determine el rango y otras características de $\mathcal{F}$. De manera similar considere las columnas de las matrices B, C y D. Llene la tabla correspondiente.

Solución. Denotemos por $n := |\mathcal{F}|$ al número de las columnas de la matriz y por $r := \mathrm{r}(\mathcal{F})$ su rango. Para determinar propiedades de $\mathcal{F}$ usamos los siguientes criterios:

$$\mathcal{F} \text{ es linealmente independiente} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{r}(\mathcal{F}) = n;$$

$$\mathcal{F} \text{ genera al espacio } V = \mathbb{R}^m \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{r}(\mathcal{F}) = m;$$

$$\mathcal{F} \text{ es una base de } V \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es linealmente independiente y genera a } V.$$

La matriz A tiene sólo dos columnas, y estas dos son linealmente independientes (la primera es no nula y la segunda no es múltiplo de la primera). Por eso $r = n = 2 < m$, y las columnas de A no generan a $\mathbb{R}^3$.

La matriz B es pseudoescalonada por filas y tiene tres filas no nulas, por eso $r = 3$. Como $r < n$, las columnas de B son linealmente dependientes. La la igualdad $r = m$ se sigue que las columnas de B generan al espacio $\mathbb{R}^3$. Como son linealmente dependientes, no forman base de $\mathbb{R}^3$.

La matriz C tiene dos filas. La primera fila es no nula, y la segunda es un múltiplo de la primera. Por eso la primera fila forma una sublista básica de la lista de filas de C, y $r = \mathrm{r}(C) = 1$. Como $r < n$ $(1 < 3)$, las columnas de C son linealmente dependientes, y como $r < m$ $(1 < 2)$, las columnas de C no generan a $\mathbb{R}^2$.

La matriz D tiene dos filas. La primera es no nula, y la segunda no es un múltiplo de la primera. Por eso $r = 2$. Como $m = n = r$, las columnas de D forman una base de $\mathbb{R}^2$.

	A	B	C	D
$\dim(V) = m$	3	3	2	2
$\lvert\mathcal{F}\rvert = n$	2	4	3	2
$\mathrm{rango}(\mathcal{F}) = r$	2	3	1	2
$\dim(S)$	2	3	1	2
¿es $\mathcal{F}$ lin. indep.	sí	no	no	sí
¿genera $\mathcal{F}$ al espacio V	no	sí	no	sí
¿es $\mathcal{F}$ una base de V	no	no	no	sí

$\square$